赛博攻击下韧性系统的动力学特性研究

吴怡淳[1,2] 闫晶晶[2,3,*] 丁冉[2,3] 唐异垒[1]

(1. 上海交通大学数学科学学院, 上海, 200240;
2. 信息系统工程重点实验室, 南京, 210023;
3. 中国电子科技集团公司第二十八研究所, 南京, 210023)

摘 要 针对提升韧性系统在复杂赛博攻击下持续保障能力的需求, 本文首先基于病毒的传播动力学原理构建赛博攻击类模型, 模拟韧性系统面临的复杂赛博威胁环境, 对其动力学特性进行深入研究; 其次, 构建一套赛博攻击下韧性系统的目标动态变化模型, 利用中心流形定理及分岔理论对韧性系统的局部稳定性进行分析; 最后, 通过 Matlab 软件, 以数值和图像的方式对赛博攻击的动力学传播过程和韧性系统的目标动态变化过程进行展现.

关键词 赛博攻击模型 韧性系统动力学 定性分析 全局动力学

Research on Dynamical Properties of Resilient System under Cyber Attack

Wu Yichun[1,2] Yan Jingjing[2,3,*] Ding Ran[2,3] Tang Yilei[1]

(1. School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;
2. Science and Technology on Information System Engineering Laboratory, Nanjing 210023, China;
3. The 28th Research Institute of CETC, Nanjing 210023, China)

Abstract In order to improve the continuous support capability of the resilient system under complex cyber attacks, this paper first builds a class of cyber attack model based on the principle of virus epidemical dynamics to simulate the complex cyber threat environment in the resilient system, and deeply studies the dynamic characteristics of the model. Then, a variant target model of the resilient system under cyber attacks is constructed, and the local stability of the resilient system is analyzed by using the center manifold theorem and the bifurcation theory. Finally, with the Matlab software, the dynamic epidemical process of cyber attacks and the dynamic variant process of the target of the resilient system are displayed in some numerical portraits.

Key words Cyber attack model Dynamics of resilient system Qualitative analysis Global dynamics
doi: 10.3969/j.issn.1006-8074.2023.03.006

1 引言

随着信息和网络技术的飞速发展, 以计算机病毒传播为主的赛博攻击对新一代韧性系统的能力提出了更高的要求. 韧性系统是在继承和发展共用信息基础设施的基础上, 引入新的理念、模式

国家自然科学基金项目 (No. 11672074) 资助
通信作者: 闫晶晶; E-mail: 8049694@qq.com
收稿日期: 2022 年 8 月 30 日

和技术等, 使自身具备更加灵活、适变和抗毁等韧性能力特征的系统[30, 31]. 一旦计算机病毒传播到一个大规模的韧性系统中, 为了确保系统的体系防控能力能有效生成, 韧性系统必须具备保持或快速恢复正常服务的能力.

计算机病毒的感染传播是复杂的, 它的动力学行为常常被类比成经典的传染病模型, 只是计算机病毒能在几秒之内在网络中广泛传播并造成破坏 [1, 4, 16]. 遭受赛博攻击后, 如果计算、存储、网络以及关联的信息和服务异常, 将严重影响系统完成核心任务的能力. 关于韧性系统的研究, 主要关注系统在遭受赛博攻击后, 能否具有保持或快速恢复正常服务的能力, 包括: 适应能力、吸收扰动能力、恢复能力等 [30, 31]. 另外, 来自外部的扰动也可能导致系统各项性能下降, 此时韧性系统能否恢复到扰动前的性能水平, 也是关注的要点, 由此产生“韧性三角”的概念 (参见图1).

我们研究发现, 病毒攻击系统也具有韧性系统的特性. 系统动力学性态的研究主要包括以下几个方面: 在突发的扰动或者变化时能否保持稳定; 对扰动或者变化系统是否能够自我修复与恢复; 能否抵抗抗干扰; 在关键因素临界点 (分岔点) 是否脆弱, 能否保持结构稳定等. 上述研究内容在韧性系统领域也非常重要且广受关注. 因此, 我们把动力系统与韧性系统结合起来考虑, 运用传播动力学的机理来建立模型, 运用动力学的方法来进行理论分析, 并把所得的结果用于韧性系统的能力分析与解释.

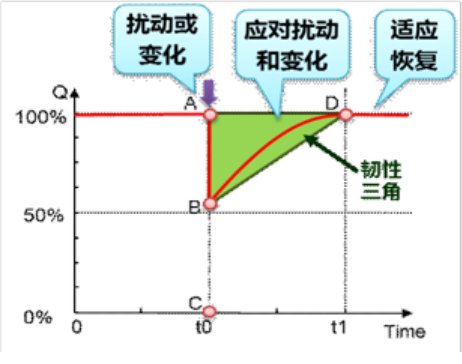


图 1 韧性三角概念图

经典的传播动力学模型源于对传染病的研究, 在研究疾病起因, 预测传染病的发展趋势, 探索科学防控上起到重要作用. 以经典的 SIS, SIR 仓室模型为基础, 研究发展过程中传播动力学结合微分方程定性与分岔理论, 将方程向高维推进, 得到了更符合真实情况的精细化、多元化、复杂化的模型.

在传统的传染病模型动力学研究中, 基于不同的方法建立了多种类型的模型. 为探索计算机病毒的传播动力学, Cohen[3], Murray[23] 及以后的学者, 将计算机病毒分为 susceptible(S), infectious(I), recovered(R), antidotal(A), breaking out(B), exposed(E), latent(L), quarantined(Q) 和 vaccinated(V) 等不同状态. 自从 Kephart 和 White[13, 14] 建立有向图模型并提出一些量化检测方法后, 人们建立了多类韧性动力学模型来刻画流行病模型在网络中的动力学传播机理, 例如: SIR 模型[10, 19, 24], SIRS 模型[9, 22, 26, 33], SEIR 模型 [7, 32], SEIRS 模型[20, 21], SLBS 模型 [8, 28, 29], SLIR 模型[11], SAIR 模型 [12, 25], SLBQRS 模型[15] 和 SEVIR 模型[27] 等.

在以往的文献中, 全局稳定性的证明常常依赖于构建 Lyapunov 函数的方法. 但是此类方法不

具有一般性且技巧性很强, 在高维微分方程的研究中难以推广. 本文在研究过程中证明两种平衡点的局部和全局渐近稳定性, 为此类问题的研究提供了新的思路和方法.

本文余下的部分安排如下: 第二节构建赛博击下韧性系统的模型; 第三节在计算基本再生数的基础上, 分别证明无病毒平衡点和有病毒平衡点的存在性, 定性分析韧性系统的局部动力学; 第四节致力于韧性系统全局动力学的研究; 最后一节通过数值模拟研究和分析韧性系统的能力特征, 包括: 适应能力、恢复能力、吸收扰动能力等.

2 基于病毒传播动力学原理的赛博攻击模型构建

在分布式拒绝服务攻击的框架下, 考虑到病毒攻击的特殊性 (例如 DDos 病毒), 我们建模时引入两种类型的网络节点: 攻击节点和目标节点. 攻击节点发起病毒攻击, 而目标节点承受攻击. 然后我们再细分攻击节点和目标节点. 攻击节点被划分为 3 个舱室: 易感染舱室 S_a(S_a 也表示易感染仓室中所含的节点数, 其他仓室亦如此), 被感染舱室 (I_a) 和外部舱室 (E_a). 目标节点也被划分为 3 个舱室: 易感染舱室 (S_t), 被感染舱室 (I_t) 和恢复舱室 (R_t). 其中, S 表示易感节点 (susceptible, S 同时也表示易感节点的数目, 下文的 I, R, E 亦如此), 即还没被感染的节点, 但与已感染节点一旦接触就可能会被感染; I 表示感染节点 (infective), 即具有病毒传染力的节点; R 表示已恢复节点 (recovered), 即已恢复正常的节点, 这部分节点具有一定免疫或者防护能力; E 表示外部节点 (exposed), 即和攻击者脱离连接, 进入断线状态而不能参与感染或被感染的攻击节点; 详细的变量符号及含义见表 1.

表 1 变量与参数标注

变量符号	含义
S_t	易感目标节点的数量
I_t	感染目标节点的数量
R_t	恢复目标节点的数量
S_a	易感攻击节点的数量
I_a	感染攻击节点的数量
R_a	恢复攻击节点的数量
β_1	易感目标节点与感染攻击节点的接触感染率
β_2	易感攻击节点与感染攻击节点的接触感染率
γ	感染目标节点的治愈率
μ	攻击节点的死亡率
α	恢复目标节点变成易感目标节点的恢复率
η	易感攻击节点和感染攻击节点断线变成外部攻击节点的断线率
k_1	外部攻击节点重新联网变成易感攻击节点的速率
k_2	外部攻击节点重新联网变成感染攻击节点的速率
A_a	攻击节点的自然增长率
B_a	外部攻击节点的补充率

记攻击和目标节点的总数分别为 N_a 和 N_t, 即

$$N_a = S_a + I_a + E_a,$$
$$N_t = S_t + I_t + R_t.$$

我们对这个模型作一些基本假设:

1. 目标节点全程都不参与到主动攻击的行动中, 因为攻击者总是意欲俘获尽可能多的感染主机并加强攻击强度;

2. 目标节点数在这个感染过程中恒定, 不出现崩坏和自然增长现象;

3. 易感目标节点与感染攻击节点的接触概率采用标准接触率, 即 $\beta_1 S_t I_a/N_a$, 其中 β_1 为正常数;

4. 恢复节点的恢复速率为一常数, 且恢复以后的节点将进入易感者舱室, 对于计算机病毒无免疫作用;

5. 所有攻击节点的崩坏率也为一个正常数;

6. 在攻击节点中, 易感节点具有一定的自然增长率 A_a, 而外部节点中也有节点数的补充, 补充率为 B_a, 这里 A_a 和 B_a 均为常数.

在这些假设下, 对目标节点我们有:

1. 易感者进入感染者舱室的速率为 $\beta_1 S_t I_a/N_a$, 其中 $\beta_1 > 0$ 为常数;

2. 感染者得到恢复而进入恢复舱室的速率为 $\gamma > 0$;

3. 恢复者无法获得永久性免疫, 以速率 α 回到易感者舱室, 其中 $\alpha > 0$ 为常数.

对攻击节点有:

1. 易感者被感染而进入感染者舱室的速率为 $\beta_2 S_t I_a/N_a$, 与攻击者断线而进入外部舱室的速率为 η, 其中 $\eta > 0$, $\beta_2 > 0$ 为常数;

2. 感染者攻击目标易感节点, 但自身与攻击者断线而进入外部舱室的速率也为 η;

3. 外部节点重新联网并分别转入易感者和感染者的概率分别为 $k_1 > 0$ 和 $k_2 > 0$;

4. 各攻击节点中的电脑崩坏率为 $\mu > 0$.

图 2 直观地描述了上述感染过程.

在上述假设下, 对于目标节点, 有:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S_t}{\mathrm{d}t} = \dfrac{-\beta_1 S_t I_a}{N_a} + \alpha(N_t - S_t - I_t), \\ \dfrac{\mathrm{d}I_t}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\beta_1 S_t I_a}{N_a} - \gamma I_t, \\ \dfrac{\mathrm{d}R_t}{\mathrm{d}t} = \gamma I_t - \alpha(N_t - S_t - I_t); \end{cases} \tag{2.1}$$

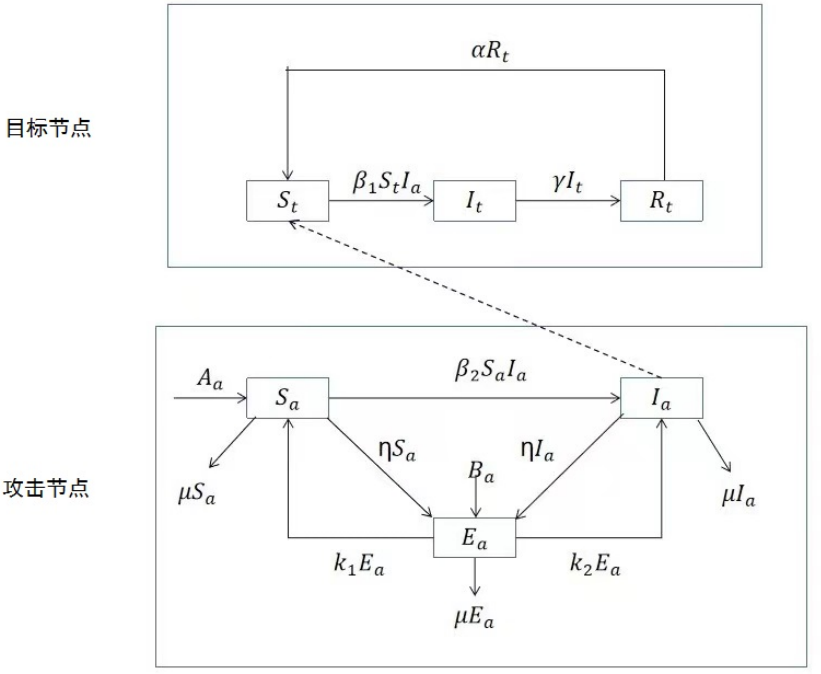


图 2　感染过程概要图

对于攻击节点, 有:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S_a}{\mathrm{d}t} = A_a - \beta_2 S_a I_a - (\mu+\eta)S_a + k_1 E_a, \\ \dfrac{\mathrm{d}I_a}{\mathrm{d}t} = \beta_2(N_a - I_a - E_a)I_a - \mu I_a + k_2 E_a - \eta I_a, \\ \dfrac{\mathrm{d}E_a}{\mathrm{d}t} = B_a + \eta(S_a + I_a) - (k_1 + k_2 + \mu)E_a. \end{cases} \tag{2.2}$$

上述模型可通过变换进行简化.

对于目标节点模型 (2.1), 首先, 利用 $S_t + I_t + R_t = N_t = N$, 作线性变换 $\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{N_t}$, $\widetilde{I}_t = \frac{I_t}{N_t}$, 然后作时间尺度变换 $\widetilde{t} = \beta_1 t$, 再令 $\widetilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta_1}, \widetilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\beta_1}$, 可消去一个参数; 对于攻击节点模型 (2.2), 由

$$\frac{\mathrm{d}S_a}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}I_a}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}E_a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}t} = A_a + B_a - \mu N_a$$

可得

$$\lim_{t\to\infty} \sup N_a \le \frac{A_a + B_a}{\mu}.$$

记 $N_a^0 = \frac{A_a+B_a}{\mu}$. 通过作线性尺度变换 $\widetilde{I_a} = \frac{I_a}{N_a^0}$, $\widetilde{E_a} = \frac{E_a}{N_a^0}$, 和时间尺度变换 $\widetilde{t} = \mu t$, 再令 $\widetilde{\beta_2} = \frac{\beta_2}{\mu}, \widetilde{\eta} = \frac{\eta}{\mu}, \widetilde{k_1} = \frac{k_1}{\mu}, \widetilde{k_2} = \frac{k_2}{\mu}, \widetilde{A_a} = \frac{A_a}{\mu}, \widetilde{B_a} = \frac{B_a}{\mu}$, 也可消去一个参数. 最终整合方程并统一变

量记号即可得到如下的四维系统:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S_t}{\mathrm{d}t} = -S_t I_a + \alpha(1 - S_t - I_t), \\ \dfrac{\mathrm{d}I_t}{\mathrm{d}t} = S_t I_a - \gamma I_t, \\ \dfrac{\mathrm{d}I_a}{\mathrm{d}t} = \beta_2(A_a + B_a)(1 - I_a - E_a)I_a - (1+\eta)I_a + k_2 E_a, \\ \dfrac{\mathrm{d}E_a}{\mathrm{d}t} = \dfrac{B_a}{A_a + B_a} + \eta - (1 + \eta + k_1 + k_2)E_a. \end{cases} \tag{2.3}$$

该系统的一个正向不变锥域 (可行域) 为:

$$\mathcal{D} = \{(S_t, I_t, I_a, E_a) \in \mathbb{R}^4_+ : S_t > 0, I_t \geq 0, I_a \geq 0, E_a \geq 0, S_t + I_t + I_a + E_a \leq 1\}.$$

3 韧性系统的局部动力学分析

韧性系统在遭受赛博攻击后的应对可划分为三个阶段: 抵御阶段、生存阶段和恢复阶段, 其中, 抵御阶段指系统在未遭受扰动时处于正常运行状态的阶段, 生存阶段是指系统吸收外部扰动的阶段, 恢复阶段是指系统能力恢复与再生的阶段. 下面我们运用动力学原理对韧性系统遭受赛博攻击后的局部稳定性进行分析.

3.1 平衡点与基本再生数

我们应用 [2, 5, 6] 中的方法计算基本再生数, 具体过程如下.

令 (2.3) 各式右端项为 0, 可以得到无病毒平衡点 $\mathcal{E}_0(1, 0, 0, 0)$, 且此时有

$$\frac{B_a}{A_a + B_a} + \eta = 0.$$

利用下一代矩阵法, 构建矩阵 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} S_t I_a \\ \beta_2(A_a + B_a)(1 - I_a - E_a)I_a \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} \gamma I_t \\ (1+\eta)I_a - k_2 I_a \end{bmatrix}.$$

代入无病毒平衡点 $\mathcal{E}_0(1, 0, 0, 0)$ 可得:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & S_t \\ 0 & \beta_2(A_a + B_a)(1 - 2I_a - E_a) \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1+\eta \end{bmatrix},$$

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+\eta} \\ 0 & \frac{\beta_2(A_a + B_a)}{1+\eta} \end{bmatrix}.$$

故可得基本再生数

$$R_0 := \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta_2(A_a + B_a)}{1 + \eta}.$$

再求系统 (2.3) 的有病毒平衡点 $\mathcal{E}_*(S_t^*, I_t^*, S_a^*, E_a^*)$. 我们先由(2.3) 的后两个式子, 得到 I_a^* 和 E_a^*, 再令(2.3) 各式右端为 0, 可得:

$$\begin{cases} S_t^* = \dfrac{\alpha\gamma}{I_a^*(\alpha+\gamma)+\alpha\gamma}, \\ I_t^* = \dfrac{I_a^*\alpha}{I_a^*(\alpha+\gamma)+\alpha\gamma}, \\ I_a^* = \dfrac{[\beta_2(A_a+B_a)(1-E_a^*)-(1+\eta)]+\sqrt{[\beta_2(A_a+B_a)(1-E_a^*)-(1+\eta)]^2+4\beta_2(A_a+B_a)k_2E_a^*}}{2\beta_2(A_a+B_a)}, \\ E_a^* = \dfrac{\frac{B_a}{A_a+B_a}+\eta}{1+\eta+k_1+k_2}. \end{cases}$$

这里 I_a^* 存在的必要条件为:

$$\sqrt{[\beta_2(A_a+B_a)(1-E_a^*)-(1+\eta)]^2+4\beta_2(A_a+B_a)k_2E_a^*}+\beta_2(A_a+B_a)(1-E_a^*)>1+\eta.$$

显然, $S_t^*+I_t^*<1$, 故奇点 $\mathcal{E}_*(S_t^*I_t^*S_a^*E_a^*)$ 在正向不变集 $\mathcal{D}$ 内.

3.2 局部稳定性分析

定理 3.1 当 $R_0<1$ 时, 系统 (2.3) 的无病毒平衡点 $\mathcal{E}_0(1,0,0,0)$ 局部渐近稳定, 而当 $R_0\geq 1$ 时，$\mathcal{E}_0(1,0,0,0)$ 不稳定.

证明 系统(2.3)在平衡点的 Jacobi 矩阵为:

$$J=\begin{bmatrix} -(I_a+\alpha) & -\alpha & -S_t & 0 \\ I_a & -\gamma & S_t & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2(A_a+B_a)(1-2I_a-E_a)-(1+\eta) & -\beta_2(A_a+B_a)I_a+k_2 \\ 0 & 0 & 0 & -(1+\eta+k_1+k_2) \end{bmatrix}.$$

故在无病毒平衡点 $\mathcal{E}_0(1,0,0,0)$ 处的 Jacobi 矩阵为:

$$J_{\mathcal{E}_0}=\begin{bmatrix} -\alpha & -\alpha & -1 & 0 \\ 0 & -\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2(A_a+B_a)-(1+\eta) & k_2 \\ 0 & 0 & 0 & -(1+\eta+k_1+k_2) \end{bmatrix}.$$

$J_{\mathcal{E}_0}$ 的特征值为:

$$\begin{cases} \lambda_1=-\alpha, \\ \lambda_2=-\gamma, \\ \lambda_3=\beta_2(A_a+B_a)-(1+\eta)=(1+\eta)(R_0-1), \\ \lambda_4=-(1+\eta+k_1+k_2). \end{cases}$$

因此, 当 $R_0<1$ 时, $J_{\mathcal{E}_0}$ 所有的特征值实部都小于 0. 由 Hurwitz 判据可知, 此时无病毒平衡点是局部稳定的. 而当 $R_0>1$ 时, $J_{\mathcal{E}_0}$ 存在具有正实部的特征值, 故此时无病毒平衡点是不稳定的.

下面用中心流形理论证明当 $R_0=1$ 时, $\mathcal{E}_0(1,0,0,0)$ 是不稳定的.

易知$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_4$ 均为负实数, $\lambda_3=0$, 故此时 $\mathcal{E}_0$ 为非双曲平衡点, 且 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_4$ 对应相空间的稳定子空间和稳定不变流形, λ_3 对应相空间的中心子空间和中心流形.

令 $S_t'=S_t-1$, 将平衡点移到原点. 记 $S_t'=y_1, I_t=y_2, I_a=y_3, E_a=y_4$. 当 $R_0=1$ 时, 有

$$\dot{Y}=\begin{bmatrix}-\alpha & -\alpha & -1 & 0\\ 0 & -\gamma & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k_2\\ 0 & 0 & 0 & -(1+\eta+k_1+k_2)\end{bmatrix}Y+\begin{bmatrix}-y_1y_3\\ y_1y_3\\ -\beta_2(A_a+B_a)(y_3^2+y_3y_4)\\ 0\end{bmatrix}.$$

记上述方程组线性部分的矩阵为 A, 非线性部分的矩阵为 B. 则存在可逆矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1 & \frac{\alpha}{\gamma-\alpha} & -\frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha} & \frac{k_2(\alpha+\gamma-L)}{L(\gamma-L)(\alpha-L)}\\ 0 & 1 & \frac{1}{\gamma} & -\frac{k_2}{L(\gamma-L)}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{k_2}{L}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

使得:

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}-\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & L\end{bmatrix},$$

其中 $L=1+\eta+k_1+k_2$.

令 $Y=PZ$, 可得

$$\dot{Z}=P^{-1}(AY+B)=P^{-1}APZ+P^{-1}B=\Lambda Z+P^{-1}B,$$

即

$$\dot{Z}=\begin{bmatrix}-\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -L\end{bmatrix}Z+\begin{bmatrix}1 & -\frac{\alpha}{\gamma-\alpha} & -\frac{\gamma}{\alpha(\gamma-\alpha)} & d_1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{\gamma} & d_2\\ 0 & 0 & 1 & \frac{k_2}{L}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-y_1y_3\\ y_1y_3\\ -\beta_2(A_a+B_a)(y_3^2+y_3y_4)\\ 0\end{bmatrix},$$

其中,

$$\begin{cases}y_1=z_1+\frac{\alpha}{\gamma-\alpha}z_2-\frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha}z_3+\frac{k_2(\alpha+\gamma-L)}{L(\gamma-L)(\alpha-L)}z_4,\\ y_2=z_2+\frac{1}{\gamma}z_3+\frac{k_2}{L(\gamma-L)}z_4,\\ y_3=z_3-\frac{k_2}{L}z_4,\\ y_4=z_4.\end{cases}$$

令 $z_4=h_3(z_3):=c_1z_3^2+c_2z_3^3+o(z_3^4)$ 为在原点处的 Taylor 展开式. 由 $\dot{z_4}=\dot{h_3}(z_3)\dot{z_3}$ 可得

$$-\frac{k_2}{L}h(z_3)=\dot{h_3}(z_3)[z_3-\frac{k_2}{L}h(z_3)][z_3-\frac{k_2}{L}h(z_3)+h(z_3)].$$

令各项系数为 0, 可得 $z_4 = h_3(z_3) = 0$.

再令 $z_1 = h_1(z_3) = a_1 z_3^2 + a_2 z_3^3 + o(z_3^4)$, $z_2 = h_2(z_3) = b_1 z_3^2 + b_2 z_3^3 + o(z_3^4)$. 同理可得

$$\dot{z_2} = -\gamma h_2(z_3) + (h_1(z_3) + \frac{\alpha}{\gamma+\alpha} h_2(z_3) - \frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha} z_3) z_3 - \frac{\beta_2(Aa+Ba)}{\gamma} z_3^2,$$

及

$$\dot{h_2}(z_3)\dot{z_3} = \dot{h_2}(z_3)[\beta_2(A_a + B_a)] z_3^2.$$

化简得

$$-(\gamma b_1 + \frac{\beta_2(A_a+B_a)}{\gamma} + \frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha}) z_3^2 + (a_1 + \frac{\alpha}{\gamma+\alpha} b_1 - 2\beta_2(A_a+B_a) b_1) z_3^3 = 0.$$

解得

$$b_1 = -\frac{1}{\gamma}[\frac{\beta_2(A_a+B_a)}{\gamma} + \frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha}] < 0,$$

$$a_1 = -\frac{2\gamma+\alpha}{\alpha^2(\gamma+\alpha)} < 0.$$

故 $h_1(z_3), h_2(z_3)$ 的泰勒展开二阶项系数都为负. 最后可得, 中心流形上的方程为

$$\dot{z_3} = -\beta_2(A_a + B_a) z_3^2 + o(z_3^3).$$

由二次项系数不为 0 知, 原点处的中心流形不稳定. 故当 $R_0 = 1$ 时, 平衡点 $\mathcal{E}_0(1,0,0,0)$ 是不稳定的.

定理 3.2 当 $R_0 > 1$ 时, 系统 (2.3) 的有病毒平衡点 $\mathcal{E}_*(S_t^*, I_t^*, S_a^*, E_a^*)$ 是局部渐近稳定的.

证明 应用中心流形定理及定理3.1, 我们可以得到在 $R_0 > 1$ 时平衡点 $\mathcal{E}_0(1,0,0,0)$ 是不稳定的, 且轨道是有界的, 均位于正向不变集 $\mathcal{D}$ 区域内.

系统 (2.3) 在平衡点 $\mathcal{E}_*(S_t^*, I_t^*, S_a^*, E_a^*)$ 的 Jacobi 矩阵为

$$J_{\mathcal{E}_*} = \begin{bmatrix} -(I_a+\alpha) & -\alpha & -S_t & 0 \\ I_a & -\gamma & S_t & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2(A_a+B_a)(1-2I_a-E_a) - (1+\eta) & -\beta_2(A_a+B_a)I_a + k_2 \\ 0 & 0 & 0 & -(1+\eta+k_1+k_2) \end{bmatrix}_{\mathcal{E}_*}.$$

可以算出, $J_{\mathcal{E}_*}$ 的特征值或者特征值的实部在 $R_0 > 1$ 时均为负数. 因为计算式子过于冗长, 此处省略. 因此, 当 $R_0 > 1$ 时系统 (2.3) 的有病毒平衡点 $\mathcal{E}_*(S_t^*, I_t^*, S_a^*, E_a^*)$ 是局部渐近稳定的.

4 韧性系统的全局动力学分析

相对于局部稳定性, 韧性系统的全局稳定性需要更强的条件来证明. 我们将系统重写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = F(S, I), \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = G(S, I), \quad G(X, 0) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $S \in \mathbb{R}^m$ 表示系统中未受感染的易感者数, $I \in \mathbb{R}^n$ 表示系统中的其他变量. 记(4.1)的无病毒平衡点为 $\tilde{\mathcal{E}}_0 = (S_0, 0)$.

我们应用文献 [2] 中的判定方法来证明无病毒平衡点的全局稳定性.

引理 4.1 ([2]) 对于系统(4.1), 以下结论成立:

(C1) 对于方程 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = F(X, 0)$, 平衡点全局渐近稳定;

(C2) $G(S, I) = AI - \widetilde{G}(S, I)$, 其中 $A = D_I G(X_0, 0)$ 是一个 M 阵, 即非对角元素均非负; $\forall (S, I) \in \Omega, \widetilde{G}(S, I) \geq 0$.

此时, 系统的无病毒平衡点 $\tilde{\mathcal{E}}_0 = (S_0, 0)$ 全局稳定.

由引理 4.1, 我们可得到下面的定理.

定理 4.1 当 $R_0 < 1$ 时, 系统 (2.3) 的无病毒平衡点是全局渐近稳定的.

证明 记无病毒平衡点为 $\mathcal{E}_0 = (S_0, 0, 0, 0)$, 其中 $S_0 = 1$. 考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = F(S, I) = -I_a S + \alpha(1 - I_t - S) = -(\alpha + I_a)S + \alpha(1 - I_t).$$

由 $F(S_0, 0) = 0$ 且 $F(S, 0) = \alpha(1 - S)$, 可得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(S-1)}{\mathrm{d}t} = \alpha(1 - S),$$

从而

$$S = 1 + C_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

当 $t \to \infty$ 时, $S \to S_0$. 故系统 (2.3) 是全局渐近稳定的, 且 (C1) 成立.

再设 $I = (I_t, I_a, E_a)^T$. 考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = G(S, I) = AI - \widetilde{G}(X, Z),$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -\gamma & S & 0 \\ 0 & \beta_2(A_a + B_a) - (1 + \eta) & k_2 \\ 0 & 0 & -(1 + \eta + k_1 + k_2) \end{bmatrix}.$$

显然, 每个非对角元都是非负的, 故 A 是一个 M 阵. 再由

$$\widetilde{G}(X, Z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_2(A_a + B_a)(I_a + E_a)I_a \\ \frac{B_a}{A_a + B_a} + \eta \end{bmatrix}$$

及在无病毒平衡点处 $\frac{B_a}{A_a + B_a} + \eta = 0$, 可得 $\widetilde{G}(X, Z) \geq 0$, 且 (C2) 成立.

综上可知, 引理 4.1中的 (C1), (C2) 都成立, 从而系统 (2.3) 的无病毒平衡点 $\mathcal{E}_0(1, 0, 0, 0)$ 在 $R_0 < 1$ 时全局渐近稳定.

定理 4.2 当 $R_0>1$, 且当参数满足条件 $(T1)$, $(T2)$ 或 $(T3)$ 之一时, 系统 (2.3) 的有病毒平衡点 $\mathcal{E}_*(S_t^*,I_t^*,S_a^*,E_a^*)$ 是全局渐近稳定的, 其中条件 $(T1)$, $(T2)$ 及 $(T3)$ 如下所示:

$$(T1)\begin{cases}\alpha\le\dfrac{1}{2}\gamma,\\ 2S_t^*<\beta_2(A_a+B_a)I_a^*+\dfrac{k_2E_a^*}{I_a^*}+(1+\eta+k_1+k_2)\end{cases};$$

$$(T2)\begin{cases}\alpha>\dfrac{1}{2}\gamma,\\ 2S_t^*+\gamma>\alpha+(1+\eta+k_1+k_2),\\ 2S_t^*<\beta_2(A_a+B_a)I_a^*+\dfrac{k_2E_a^*}{I_a^*}+(1+\eta+k_1+k_2);\end{cases}$$

$$(T3)\begin{cases}\alpha>\dfrac{1}{2}\gamma,\\ 2S_t^*+\gamma<\alpha+(1+\eta+k_1+k_2),\\ \alpha<\gamma+\beta_2(A_a+B_a)I_a^*+\dfrac{k_2E_a^*}{I_a^*}.\end{cases}$$

证明 我们利用高维 Bendixson 判据[17, 18] 来证明这个定理. 在以下条件具备时去讨论全局稳定性.

对于自治微分系统 (2.3), 可以验证, 系统的可行域 $\mathcal{D}=\{(S_t,I_t,I_a,E_a)\in\mathbb{R}_+^4:S_t>0,I_t\ge0,I_a\ge0,E_a\ge0,S_t+I_t+I_a+E_a\le1\}$ 是单连通区域; 由定理3.2可知, 有病毒平衡点 $\mathcal{E}_*(S_t^*,I_t^*,S_a^*,E_a^*)$ 在 $R_0>1$ 时局部渐近稳定, 因此, 在 $\mathcal{D}$ 中有一个紧的吸引域 $K\in\mathcal{D}$. 由平衡点的求解过程知, 系统(2.3)在 $\mathcal{D}$ 内部有唯一平衡点 $E_0^*(S_t^*,I_t^*,I_a^*,E_a^*)$.

二维时的散度为 Jacobi 矩阵的对角元之和, 我们需要给出高维时的散度, 故引入第二加性复合矩阵并计算 Lozinskii 测度.

首先, 系统在有病毒平衡点处的 Jacobi 矩阵为

$$J=\begin{bmatrix}-(I_a^*+\alpha) & -\alpha & -S_t^* & 0\\ I_a^* & -\gamma & S_t^* & 0\\ 0 & 0 & \beta_2(A_a+B_a)(1-2I_a^*-E_a^*)-(1+\eta) & -\beta_2(A_a+B_a)I_a^*+k_2\\ 0 & 0 & 0 & -(1+\eta+k_1+k_2)\end{bmatrix}.$$

由字典顺序 (1)=(1,2), (2)=(1,3), (3)=(1,4), (4)=(2,3), (5)=(2,4), (6)=(3,4), 可得第二加性复合矩阵

$$J^{[2]}=\begin{bmatrix}a_{11} & S_t^* & 0 & S_t^* & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & -\beta_2(A_a+B_a)I_a^*+k_2 & -\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & -\alpha & -S_t^*\\ 0 & I_a^* & 0 & a_{44} & -\beta_2(A_a+B_a)I_a^*+k_2 & 0\\ 0 & 0 & I_a^* & 0 & a_{55} & S_t^*\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66}\end{bmatrix},$$

其中,

$$\begin{cases} a_{11} = -(I_a^* + \alpha) - \gamma, \\ a_{22} = -(I_a^* + \alpha) + \beta_2(A_a + B_a)(1 - 2I_a^* - E_a^*) - (1 + \eta), \\ a_{33} = -(I_a^* + \alpha) - (1 + \eta + k_1 + k_2), \\ a_{44} = -\gamma + \beta_2(A_a + B_a)(1 - 2I_a^* - E_a^*) - (1 + \eta), \\ a_{55} = -\gamma - (1 + \eta + k_1 + k_2), \\ a_{66} = \beta_2(A_a + B_a)(1 - 2I_a^* - E_a^*) - (1 + \eta) - (1 + \eta + k_1 + k_2). \end{cases}$$

然后, 我们来计算 Lozinskii 测度. 为此, 构造一个 6 维对角方阵:

$$A = \text{diag}(1, \frac{I_t}{I_a}, \frac{I_t}{I_a}, \cdots, \frac{I_t}{I_a}).$$

易得,

$$A^{-1} = \text{diag}(1, \frac{I_a}{I_t}, \frac{I_a}{I_t}, \cdots, \frac{I_a}{I_t}), \quad A_f = (0, (\frac{I_t}{I_a})_f, (\frac{I_t}{I_a})_f, \cdots, (\frac{I_t}{I_a})_f),$$

$$A_f A^{-1} = (0, \frac{I_t'}{I_t} - \frac{I_a'}{I_a}, \frac{I_t'}{I_t} - \frac{I_a'}{I_a}, \cdots, \frac{I_t'}{I_t} - \frac{I_a'}{I_a}),$$

其中 $(\frac{I_t}{I_a})_f = \frac{E'}{I} - \frac{EI'}{I^2}$.

令

$$B = A_f A^{-1} + AJ^{[2]}A^{-1} = A_f A^{-1} + J^{[2]}.$$

将其写成如下分块矩阵形式:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

其中,

$$B_{11} = [-(I_a^* + \alpha) - \gamma], \quad B_{12} = [S_t^* \quad 0 \quad S_t^* \quad 0 \quad 0],$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & -\beta_2(A_a + B_a)I_a^* + k_2 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & b_{33} & 0 & -\alpha & -S_t^* \\ I_a^* & 0 & b_{44} & -\beta_2(A_a + B_a)I_a^* + k_2 & 0 \\ 0 & I_a^* & 0 & b_{55} & S_t^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix},$$

其中 $b_{ii} = a_{ii} + \frac{I_t'}{I_t} - \frac{I_a'}{I_a}$.

设 μ 为 L_1 矩阵范数诱导的 Lozinskii 测度. 令

$$l_1 = \mu(B_{11}) + |B_{12}|, \quad l_2 = \mu(B_{22}) + |B_{21}|,$$

其中, $|B_{12}|, |B_{21}|$ 是 L_1 向量范数, 即 $|B_{12}| = S_t^*, |B_{21}| = 0$; $\mu(B_{11}) = -I_a^* - \alpha - \gamma, \mu(B_{22})$ 是 B_{22} 各列非对角元绝对值之和加上对角元所得 5 个值的最大者, 即

$$\mu(B_{22}) = \max\{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\}.$$

其中 $K_i=\sum_{j\neq i}|b_{ij}|+b_{ii}, i=1,2,\cdots,5.$

由定义可知

$$\mu(B)\leq \sup\{l_1,l_2\}.$$

下面计算 $\mu(B_{22})$. 由 B_{22} 可知,

$$\begin{cases} K_1=-\alpha+\beta_2(A_a+B_a)(1-2I_a^*-E_a^*)-(1+\eta)+\dfrac{I_t'}{I_t}-\dfrac{I_a'}{I_a},\\ K_2=-\beta_2(A_a+B_a)I_a^*+k_2-\alpha-(1+\eta+k_1+k_2)+\dfrac{I_t'}{I_t}-\dfrac{I_a'}{I_a},\\ K_3=\alpha-\gamma+\beta_2(A_a+B_a)(1-2I_a^*-E_a^*)-(1+\eta)+\dfrac{I_t'}{I_t}-\dfrac{I_a'}{I_a},\\ K_4=\alpha-\beta_2(A_a+B_a)I_a^*+k_2-\gamma-(1+\eta+k_1+k_2)+\dfrac{I_t'}{I_t}-\dfrac{I_a'}{I_a},\\ K_5=2S_t^*+\beta_2(A_a+B_a)(1-2I_a^*-E_a^*)-(1+\eta)-(1+\eta+k_1+k_2)+\dfrac{I_t'}{I_t}-\dfrac{I_a'}{I_a}. \end{cases}$$

当 $\alpha>\frac{1}{2}\gamma$ 时, 因为 $K_4>K_2, K_3>K_1$ 且

$$\begin{aligned} K_4-K_3&=\alpha-\beta_2(A_a+B_a)I_a^*+k_2-\gamma-(1+\eta+k_1+k_2)-\alpha+\gamma\\ &\quad-\beta_2(A_a+B_a)(1-2I_a^*-E_a^*)+(1+\eta)\\ &=-k_1-\beta_2(A_a+B_a)(1-I_a^*-E_a^*)\\ &\leq 0, \end{aligned}$$

故 $\mu(B_{22})=\max\{K_3,K_5\}$.

又因为

$$\begin{aligned} K_5-K_3&=2S_t^*+\beta_2(A_a+B_a)(1-2I_a^*-E_a^*)-(1+\eta)-(1+\eta+k_1+k_2)\\ &\quad-\alpha-\gamma+\beta_2(A_a+B_a)(1-2I_a^*-E_a^*)-(1+\eta)\\ &=2S_t^*+\gamma-\alpha-(1+\eta+k_1+k_2), \end{aligned}$$

故当 $2S_t^*+\gamma\geq\alpha+(1+\eta+k_1+k_2)$ 时,

$$\mu(B_{22})=K_5=\alpha-\gamma+\beta_2(A_a+B_a)(1-2I_a^*-E_a^*)-(1+\eta)+\frac{I_t'}{I_t}-\frac{I_a'}{I_a}.$$

由 (2.3) 可得

$$\frac{I_t'}{I_t}=\frac{S_tI_a}{I_t}-\gamma,$$

$$\frac{I_a'}{I_a}=\beta_2(A_a+B_a)(1-E_a-I_a)+\frac{k_2E_a}{I_a}-(1+\eta).$$

故

$$\mu(B_{22})-\frac{I_a'}{I_a}=2S_t^*-\beta_2(A_a+B_a)I_a^*-\frac{k_2E_a^*}{I_a^*}-(1+\eta+k_1+k_2).$$

当 $2S_t^*+\gamma<\alpha+(1+\eta+k_1+k_2)$ 时, $\mu(B_{22})=K_3$. 类似地, 有

$$\mu(B_{22})-\frac{I_a'}{I_a}=\alpha-\gamma-\beta_2(A_a+B_a)I_a^*-\frac{k_2E_a^*}{I_a^*}.$$

此外, 我们还可得到: 当 $2S_t^* < \beta_2(A_a+B_a)I_a^* + \frac{k_2E_a^*}{I_a^*} + (1+\eta+k_1+k_2)$ 时, 存在 $\epsilon>0$, 使得

$$l_2 = \alpha - \gamma + \beta_2(A_a+B_a)(1-2I_a^*-E_a^*) - (1+\eta) + \frac{I_t'}{I_t} - \frac{I_a'}{I_a} \le \frac{I_t'}{I_t} - \epsilon;$$

当 $\alpha < \gamma + \beta_2(A_a+B_a)I_a^* + \frac{k_2E_a^*}{I_a^*}$ 时, 存在 $\epsilon>0$, 使得 $l_2 < \frac{I_t'}{I_t} - \epsilon$.

当 $\alpha < \frac{1}{2}\gamma$ 时, 易得 $K_4 < K_2$, $K_3 < K_1$ 且 $K_2 - K_1 \le 0$.

若 $2S_t^* + \alpha \ge 1+\eta+k_1+k_2$, 则有 $\mu(B_{22}) = K_5$.

若 $2S_t^* + \alpha < 1+\eta+k_1+k_2$, 则有 $\mu(B_{22}) = K_1$. 此时, 有

$$K_1 - \frac{I_a^*}{I_a} = -\alpha - \beta_2(A_a+B_a)I_a^* - \frac{k_2E_a^*}{I_a^*} < 0.$$

用与前文中类似的方法可得: 当 $2S_t^* < \beta_2(A_a+B_a)I_a^* + \frac{k_2E_a^*}{I_a^*} + (1+\eta+k_1+k_2)$ 时, 存在 $\epsilon>0$, 使得 $l_2 < \frac{I_t'}{I_t} - \epsilon$; 当 $2S_t^* < \beta_2(A_a+B_a)I_a^* + \frac{k_2E_a^*}{I_a^*} + (1+\eta+k_1+k_2)$ 时, 存在 $\epsilon>0$, 使得 $l_2 < \frac{I_t'}{I_t} - \epsilon$.

综上可知, 当参数满足 $(T1)$, $(T2)$ 或 $(T3)$ 时, 存在 $\epsilon>0$, 使得 $l_2 < \frac{I_t'}{I_t} - \epsilon$.

现在来估计

$$\bar{q} = \limsup_{t\to\infty} \sup_{x_0\in\tau} \frac{1}{t}\int_0^t \mu(B(x(s,x_0))\mathrm{d}s.$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t \mu(B(x(s,x_0))\mathrm{d}s &\le \frac{1}{t}\int_0^t \sup\{l_1l_2\}\mathrm{d}s\\ &\le \frac{1}{t}\int_0^t (\frac{I_t'}{I_t} - \epsilon)\mathrm{d}s\\ &= \frac{\ln I_t}{t} - \epsilon,\end{aligned}$$

故令 $t\to\infty$, 可得 $\bar{q} < 0$.

由高维 Bendixson 判据可知, 当 $R_0 > 1$ 时, 系统 (2.3) 的有病毒平衡点 $\mathcal{E}_*(S_t^*, I_t^*, S_a^*, E_a^*)$ 是全局渐近稳定的.

5 数值模拟及韧性分析

本节将通过 Matlab 仿真来模拟计算机病毒传播的动力学过程以及韧性系统的稳定性.

首先我们验证当 $R_0 < 1$ 时, 无病毒平衡点的全局稳定性.

设定参数: $\alpha = 0.3$, $\beta_1 = 0.8$, $\beta_2 = 0.02$, $\gamma = 0.03$, $\eta = 0$, $k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.4$, $A_a = 10$, $B_a = 0$. 此时, 可得

$$R_0 = \frac{0.02\times 10}{1} = 0.2.$$

如果初值 $X_0(S_t^0, I_t^0, I_a^0, E_a^0) = (0.6, 0.3, 0.2, 0.5)$, 则得到如图3所示的结果. 由图3可知, 无病毒平衡点存在. 为了进一步验证当 $R_0 < 1$ 时系统的全局稳定性, 将初值换为: $X_0(S_t^0, I_t^0, I_a^0, E_a^0) = (0.3, 0.6, 0.7, 0.2)$, 得到如图4所示的结果.

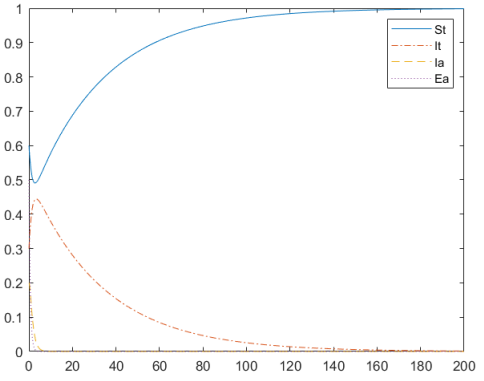


图 3 $X_0 = (0.6, 0.3, 0.2, 0.5), R_0 < 1$

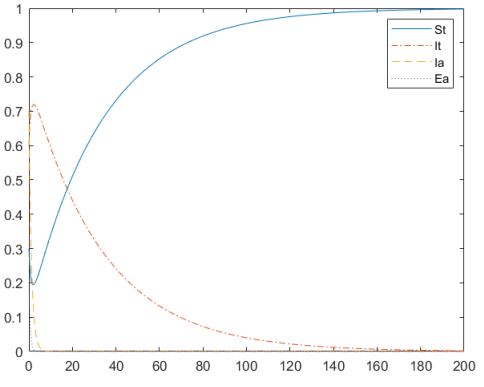


图 4 $X_0 = (0.3, 0.6, 0.7, 0.2), R_0 < 1$

可以看到, 当选取不同的初值时, 在 $R_0 < 1$ 的情形下, 无病毒平衡点具有全局稳定性. 这体现了韧性系统的适应能力和恢复能力.

接下来我们考虑当 $R_0 > 1$ 时, 有病毒平衡点的全局稳定性. 设定参数: $\alpha = 0.4$, $\beta_1 = 0.4$, $\beta_2 = 0.04$, $\gamma = 0.03$, $\eta = 0.4$, $k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.4$, $A_a = 100$, $B_a = 3$. 此时,

$$R_0 = \frac{0.04 \times 100}{1 + 0.4} = 2.86.$$

当初值为 $X_0(S_t^0, I_t^0, I_a^0, E_a^0) = (0.6, 0.3, 0.2, 0.5)$ 时, 得到图5所示的结果. 由图5 可知, 此时有病毒平衡点存在. 为了进一步验证在 $R_0 > 1$ 时系统的全局稳定性, 将初值换为: $X_0(S_t^0, I_t^0, I_a^0, E_a^0) = (0.3, 0.6, 0.5, 0.2)$, 得到如图6所示的结果, 其中, 时域为 $t \in [0, 200]$. 在 $t = 200$ 时, 图5、图6中的平衡点坐标分别为:

$$E_5^*(0.0578, 0.8765, 0.4557, 0.1734),\ E_6^*(0.0578, 0.8765, 0.4553, 0.1732).$$

二者相差极小. 随着 t 的增大, 系统显然具有全局稳定性, 这也体现了韧性系统的适应能力、恢复能力和吸收扰动能力.

最后, 我们检验在 $R_0 = 1$ 这一临界情形下, 无病毒平衡点的稳定性. 设定参数: $\alpha = 0.4,\ \beta_1 = 0.4,\ \beta_2 = 0.01,\ \gamma = 0.03,\ \eta =,\ k_1 = 0.2,\ k_2 = 0.4,\ A_a = 100,\ B_a = 0$. 此时

$$R_0 = \frac{0.01 \times 100}{1} = 1.$$

分别取初值为 $X_0(S_t^0, I_t^0, I_a^0, E_a^0) = (0.6, 0.3, 0.2, 0.5)$ 和 (0.3, 0.6, 0.6, 0.2). 尽管在此时收敛的速度较慢, 但是当扩大时域时, 我们能观察到在 $R_0 = 1$ 时系统具有渐近稳定性, 得到的结果分别如图7和图 8所示. 尽管我们可以得到系统在平衡态的稳定性, 但此时存在分岔现象, 系统的结构会随着 R_0 的变化而发生改变.

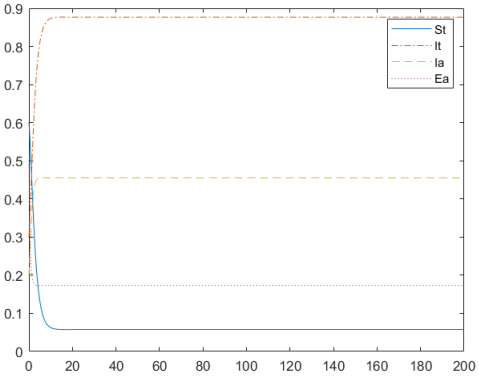


图 5 $X_0 = (0.6, 0.3, 0.2, 0.5), R_0 > 1$

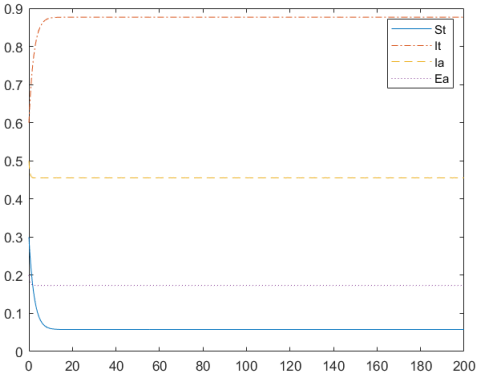


图 6 $X_0 = (0.3, 0.6, 0.5, 0.2), R_0 > 1$

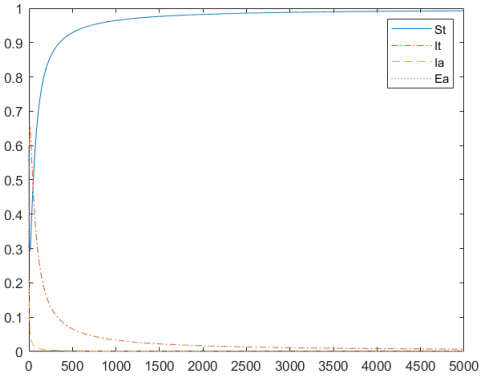


图 7 $X_0 = (0.6, 0.3, 0.2, 0.5), R_0 = 1$

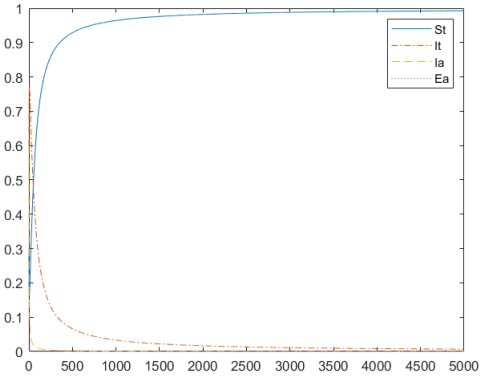


图 8 $X_0 = (0.3, 0.6, 0.6, 0.2), R_0 = 1$

参考文献

[1] Al-Tuwairqi S, Bahashwan W. A dynamic model of viruses with the effect of removable media on a computer network with heterogeneous immunity[J]. Advances in Difference Equations, 2020, 1: 260.

[2] Castillo-Chavez C, Feng Z, Huang W. On the computation of R_0 and its role in global stability[J]. IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, 2002, 125 : 229–250.

[3] Cohen F . Computer Viruses - Theory and Experiments[J]. Computers & Security, 1987, 6: 22–35.

[4] Dang Q A, Tuan H M. Positivity and global stability preserving NSFD schemes for a mixing propagation model of computer viruses[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 374: 112753.

[5] Diekmann O, Heesterbeek J A P, Metz J A. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations[J]. Journal of Mathematical Biology, 1990, 28: 365–382.

[6] Dreessche P, Watmough J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Revue de Bio-Mathématique (Nouvelle Série), 2002, 180(1-2): 29-48.

[7] Tao D, Liao X, Li H. Stability and Hopf Bifurcation in a Computer Virus Model with Multistate Antivirus[J]. Abstract and Applied Analysis, 2012, 2012: 841987.

[8] Erdogan M E, Uslu K. Stability analysis on effect of system restore on epidemic model for computer viruses[J]. IFSCOM, 2016, 1: 91-104.

[9] Gan C, Yang X, Liu W, et al. A propagation model of computer virus with nonlinear vaccination probability[J]. Communications in nonlinear science and numerical simulation, 2014, 19-1 : 92-100.

[10] Gan C, Feng Q, Zhu Q, Zhang Z, et,al. Analysis of computer virus propagation behaviors over complex networks: a case study of Oregon routing network[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 100: 1725-1740.

[11] Khanh N H, Huy N B. Stability analysis of a computer virus propagation model with antidote in vulnerable system[J]. Acta Mathematica Scientia, 2016, 1: 49-61.

[12] Khanh N H. Dynamical analysis and approximate iterative solutions of an antidotal computer virus model[J]. International Journal of Applied and Computational Mathematics, 2017, 3: 829-841.

[13] Kephart J O, White S R. Directed-graph epidemiological models of computer viruses[M]. Computation: the micro and the macro view. 1992: 71-102.

[14] Kephart J O, White S R. Measuring and modeling computer virus prevalence[C]. Proceedings 1993 IEEE Computer Society Symposium on Research in Security and Privacy. IEEE, 1993: 2-15.

[15] Kumar M, Mishra B K, Panda T C. Stability analysis of a quarantined epidemic model with latent and breaking-out over the Internet[J]. International Journal of Hybrid Information Technology, 2015, 8(7): 133-148.

[16] Kumari S, Singh P, Upadhyay R K. Virus dynamics of a distributed attack on a targeted network: Effect of firewall and optimal control[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2019, 73: 74-91.

[17] Li Y, Muldowney J S. On Bendixson′ s Criterion[J]. Journal of Differential Equations, 1993, 106(1): 27-39.

[18] Li M Y, Muldowney J S. A geometric approach to global-stability problems[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1996, 27(4): 1070-1083.

[19] Mishra B K, Jha N. Fixed period of temporary immunity after run of anti-malicious software on computer nodes[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 190(2): 1207-1212.

[20] Mishra B K, Saini D K. SEIRS epidemic model with delay for transmission of malicious objects in computer network[J]. Applied mathematics and computation, 2007, 188(2): 1476-1482.

[21] Mishra B K, Pandey S K. Dynamic model of worms with vertical transmission in computer network[J]. Applied mathematics and computation, 2011, 217(21): 8438-8446.

[22] Muroya Y, Enatsu Y, Li H. Global stability of a delayed SIRS computer virus propagation model[J].

International Journal of Computer Mathematics, 2014, 91(3): 347-367.

[23] Murray W H. The application of epidemiology to computer viruses[J]. Computers & Security, 1988, 7(2): 139-145.

[24] Piqueira J R C, Araujo V O. A modified epidemiological model for computer viruses[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 213(2): 355-360.

[25] Qin P. Analysis of a model for computer virus transmission[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015:720696.

[26] Ren J, Yang X, Zhu Q, et al. A novel computer virus model and its dynamics[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, 13(1): 376-384.

[27] Upadhyay R K, Kumari S, Misra A K. Modeling the virus dynamics in computer network with SVEIR model and nonlinear incident rate[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2017, 54: 485-509.

[28] Yang L X, Yang X. Propagation behavior of virus codes in the situation that infected computers are connected to the Internet with positive probability[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2012, 2012: 693695.

[29] Yang L X, Yang X, Zhu Q, et al. A computer virus model with graded cure rates[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2013, 14(1): 414-422.

[30] 赵鑫, 于靖, 刘祥, 等. 韧性信息服务云环境核心任务保障架构 [J]. 指挥信息系统与技术, 2018, 9(6): 19-24.

[31] 周芳, 丁峰, 丁冉, 等. 威胁驱动的指挥信息系统韧性评估试验方法 [J]. 指挥信息系统与技术, 2019, 10(3): 18-24.

[32] Zhu Q, Yang X, Ren J. Modeling and analysis of the spread of computer virus[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(12): 5117-5124.

[33] Zhu Q, Yang X, Yang L X, et al. A mixing propagation model of computer viruses and countermeasures[J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 73: 1433-1441.